МЕТОД НА ЛИНЕЙНОТО МАТРИЧНО НЕРАВЕНСТВО ЗА СТОХАСТИЧЕН МОДЕЛ НА СКОКООБРАЗНИ МАРКОВСКИ ЛИНЕЙНИ СИСТЕМИ[1]

Проф. дмн Иван Ганчев Иванов, СУ "Св. Климент Охридски"
гл. ас. Нонка Александрова Георгиева, СА „ Д. А. Ценов"

Резюме: Разглеждаме един клас от линейноквадратични стохастични модели на Марковски скокообразни системи. Целта в модела е намирането на най-доброто управление за модела. Търсенето на функцията на управление преминава през пресмятане на максималното решение на система от обобщени дискретни Рикатиеви уравнения. Ефективен метод за намиране на максималното решение е метода на линейното матрично неравенство (стандартен метод). В настоящата статия представяме две нови модификации на метода на линейното матрично неравенство. Проведени са числени експерименти за сравняване на изчислителните характеристики на модифицираните методи и стандартния метод. Експериментите показват ефективността на новите методи спрямо стандартния метод.

Ключови думи: Линейно матрично неравенство, Марковски скачащи линейни системи, стохастичен модел, матрично уравнение, обобщени дискретни алгебрични уравнения на Рикати.

JEL: C6, C7, C73, C020

A LINEAR MATRIX INEQUALITY METHOD FOR STOCHASTIC MODEL ON MARKOV JUMP LINEAR SYSTEMS

Prof. Dr. Sc. Ivan Ivanov
Assist. Prof. Nonka Georgieva

Abstract: We consider a special class of linear quadratic stochastic models on Markov jump linear system. The aim is to find the best control function for a model. The search of the control function passes trough the computation of the maximal solution to a system of the general discrete time Riccati equations. An effective method for finding the maximal solution is the method of a linear matrix inequality (a standard method). In this paper we present two new modifications of the method of a linear matrix inequality. The numerical experiments for comparing the computational characteristics of the modified methods and the standard method are executed. The numerical experiments show the effectiveness of new methods to the standard method.

Key words: Linear matrix inequality, Markov jump linear systems, stochastic model, matrix equation, generalized discrete-time Riccati equations.

JEL: C6, C7, C73, C020

---

[1] Авторският принос е както следва: Проф. дмн **И. Иванов,** – т. 1(в съавторство), т.3(в съавторство), т. 5, т.6(в съавторство) ; Гл. ас. **Н. Георгиева,** – т. 1(в съавторство), т.2, т.3(в съавторство), т.4, т.6(в съавторство), т. 7.

1. Увод

Процесът на моделиране и създадените модели са актуални инструменти при изследване и анализ на важни процеси от икономиката и финансите. Съвременният надежден инструмент в процеса на моделиране е стохастичният модел. При моделиране на конкретен процес значение има поведението на икономическия агент, който трябва да управлява процеса. Резултатът от прилагането на модела предлага решение, определящо възможно най-доброто поведение на икономическия агент в хода на моделирания процес. Важно за практиката и приложенията е да се вземат бързи и ефективни решения в конкретни ситуации. А за целта е необходимо бързо решаване на конкретния модел с достигане на необходимата точност. В настоящата статия се разглежда моделирането на състоянието на конкретна икономическа система, която в своето развитие може да заема няколко състояния, като преминаването от едно към друго е на принципа на случайността.

В общия случай се разглежда динамична система, чието състояние x(k) на етап k се получава от следната зависимост:

(1) $$x(k+1) = A_{\theta(k)}x(k) + B_{\theta(k)}u(k),$$

u (k) е функцията на управление на системата на етап k, $\theta(k)$, k=0,1,2,…. е зададена дискретна Марковска верига със стойности от множеството {1,2,…,N}. Целта при развитието на системата (1) е да се минимизира функционала

(2) $$\min \; J\ (x(0),\theta(0),u),$$

представен във вида:

$$J\ (x(0),\theta(0),u) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} E\{[x(k)^T, u(k)^T]\begin{bmatrix} Q_{\theta(k)} & L_{\theta(k)} \\ L^*_{\theta(k)} & R_{\theta(k)} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x(k) \\ u(k) \end{bmatrix}\},$$

в който E[.] е математическото очакване, а индексът ^{T} означава, че съответните елементи са транспонирани. Функционалът $J\ (x(0),\theta(0),u)$ се интерпретира като „разстояние” или „различие” между текущото положение на системата и състоянието, към което се стреми системата под въздействието на управлението u(k). Търсенето на най-малка стойност гарантира възможно най-голяма близост на системата до състоянието, към което се стреми. Двойката матрици $(A_{\theta(k)}, B_{\theta(k)})$ описват едно конкретно състояние на изследваната система. За представения общ модел е известна матрицата на вероятностите за преход $P = (p_{ij})$. Общият модел (1)-(2) е известен в литературата като линейно квадратичен стохастичен модел за скокообразни Марковски вериги (Markovian jump linear systems). Интерпретацията на този модел и неговото приложение в икономическата и финансова сфера е представено в редица публикации.[23]

Коефициентите в оптимизационния модел (1)-(2) $A_{\theta(k)}, B_{\theta(k)}, L_{\theta(k)}$ са известни реални матрици за всяка стойност на индекса $\theta(k)$, докато тегловите матрици във функционала $Q_{\theta(k)}, R_{\theta(k)}$ са симетрични матрици за всяка стойност на $\theta(k)$. Типичното предположение за тегловите матрици е, че клетъчната матрица $\begin{bmatrix} Q_{\theta(k)} & L_{\theta(k)} \\ L^*_{\theta(k)} & R_{\theta(k)} \end{bmatrix}$ е положително определена за всяка стойност на $\theta(k)$. Много често

[2]**do Val, J.B.R, Basar, T.** Receding horizon control of jump linear systems and a macroeconomic policy problem. // Journal of Economic Dynamics and Control, 1999, 23, с. 1099.

[3]**Costa, O.L.V., de Paulo W.L.** Indefinite quadratic with linear costs optimal control of Markov jump with multiplicative noise systems. // Automatica, 2007, 43, с. 587.

матриците $L_{\theta(k)}$ са равни на нула за всяка стойност на $\theta(k)$. Тогава условието за положителна определеност се свежда до положителната определеност на матриците $Q_{\theta(k)}, R_{\theta(k)}$ за всяка стойност на k. Същите тези матрици се наричат теглови матрици, защото от тях зависи стойността на функционала $J\ (x(0), \theta(0), u)$.

Търсенето на функцията на управление u(k) на линейноквадратичния оптимизационен модел (1)-(2) преминава през търсене на максимално решение на системата матрични нелинейни уравнения (i=1,…,N):

$$X_i = \mathrm{T}_i(\mathbf{X}) := A_i^T \Xi_i(\mathbf{X}) A_i + Q_i - (A_i^T \Xi_i(\mathbf{X}) B_i + L_i) \times (R_i + B_i^T \Xi_i(\mathbf{X}) B_i)^{-1} (B_i^T \Xi_i(\mathbf{X}) A_i + L_i^T), \quad (3)$$

за които е наложено допълнителното условие $(R_i + B_i^T \Xi_i(\mathbf{X}) B_i) > 0$, където $\mathbf{X}$ = $(X_1, X_2, ..., X_N)$, $\Xi_i(\mathbf{X}) = \sum_{j=1}^{N} p_{ij} X_j$ и X_j е неизвестна $n \times n$ симетрична матрица за j=1,…,N. Последната система се нарича още система от дискретни алгебрични уравнения на Рикати. Ако $\tilde{\mathbf{X}} = (\tilde{X}_1, ..., \tilde{X}_N)$ е максималното решение на горната система при $(R_i + B_i^T \Xi_i(\tilde{\mathbf{X}}) B_i) > 0$, то функцията на управление за модела (1)-(2) има вида:

$$\tilde{u}(k) = -(R_{\theta(k)} + B_{\theta(k)}^T \Xi_{\theta(k)}(\tilde{\mathbf{X}}) B_{\theta(k)})^{-1} (B_{\theta(k)}^T \Xi_{\theta(k)}(\tilde{\mathbf{X}}) A_{\theta(k)} + L_{\theta(k)}^T) x(k). \quad (4)$$

Линейноквадратичния оптимизационен модел (1)-(2) трябва да се прилага при всяка промяна в развитието на изследваната система, за да може функцията на управление да съответства на моментното състояние на системата. А прилагането на модела е свързано с решаването на съответната система дискретни Рикатиеви уравнения от вида (3).

Обектът в настоящото изследване е системата дискретни Рикатиеви уравнения и методите за търсене на максимално решение на тази система. Ще формулираме целите на изследването, след като се запознаем с известните методи за пресмятане на максималното решение на системата (3). Максималното решение определя оптималното управление в модела и затова методите за неговото намиране ще интерпретираме като методи за намиране на равновесието в модела.

2. Търсене на равновесна точка

Добре известен в литературата е подходът за решаване на обобщени дискретни алгебрични Рикатиеви уравнения чрез преобразуването им до съответна оптимизационна задача. Този подход е активно използван от авторите Rami, Zhou и Moore[4], Rami и Zhou[5], които прилагат този подход към

[4] **Rami M.A., Zhou, X.Y., Moore J.B.** Well-posedness and attainability of indefinite stochastic linear quadratic control in infinite time horizon. // Systems and Control Letters, 2000, 41, с. 123

[5] **Rami, M., Zhou, X.** Linear matrix inequalities, Riccati equations, and indefinite stochastic linear quadratic controls. // IEEE Transactions on automatic control, 2000, 45, с. 1131.

непрекъснати обобщени Рикатиеви уравнения. Един обзор на прилагането на този подход може да се види в Rami и Ghaoui[6]. За системата от разглеждания вид (3), Costa и Marques[7][8] разглеждат оптимизационната задача:

$$
\begin{aligned}
&\max < I_n, \mathbf{X} > \\
(5)\qquad &\begin{pmatrix} -X_i + A_i^T \Xi_i(\mathbf{X}) A_i + Q_i & A_i^T \Xi_i(\mathbf{X}) B_i + L_i \\ L_i^T + B_i^T \Xi_i(\mathbf{X}) A_i & R_i + B_i^T \Xi_i(\mathbf{X}) B_i \end{pmatrix} \geq 0 \\
&R_i + B_i^T \Xi_i(\mathbf{X}) B_i > 0,
\end{aligned}
$$

където i=1,…,N и <X, Y> означава матрично скаларно произведение. Задачата (5) е изпъкнала оптимизационна задача и методът за нейното решаване е известен в литературата като метод на линейното матрично неравенство (ЛМН). В съвременните програмни пакети съществуват вградени програмни модули за решаването на задачи чрез този метод. Costa и Marques[9] са доказали, че максималното решение на системата (3) съвпада с решението на оптимизационната задача (5).
Разглеждаме два итерационни метода за намиране на максималното решение на системата от обобщени дискретни Рикатиеви уравнения от вида (3). Costa и Marques са предложили метод, който се прилага върху цялата система, т.е. върху всички уравнения едновременно. Този метод е описан алгоритъм (Ал СМ) от Иванов[10] и се използва при изпълнение на дейностите по проекта. При изпълнение на описания алгоритъм основната трудност е решаването на една голяма система линейни уравнения от размерност Nn x Nn. Изчислителната работа е скъпа при големи стойности на n (размерността на неизвестната матрица за системата (3)).

Свойствата на предложения метод Ал СМ са изследвани от Costa и Marques, като същият е разгледан като алтернатива на оптимизационната задача (5). Освен тези два подхода е известен и друг итерационен метод[11] за решаване на (3), който се нарича метод на Стейн и се прилага за всяко уравнение поотделно, за разлика от метода Ал СМ. По този начин се избягва едновременното решаване на системата (3), което пък е предпоставка за възможността метода на Стейн да се приложи паралелно (едновременно) към всяко уравнение. Методът на Стейн се представя чрез следната итерационна формула:

[6] **Rami,M., Ghaoui, L**. LMI optimization for nonstandard Riccati equations arising in stochastic control. // IEEE Transactions on Automatic Control, 1996, 41, с. 1666.

[7] **Costa, O.L.V., Marques, R.P..** Maximal and stabilizing Hermitian solutions for discrete-time coupled algebraic Riccati equations. // Mathematics of Control, Signals and Systems, 1999, 12, с.167.

[8] **Costa, O.L.V., Fragoso M.D., Marques R.P**. Discrete-Time Markov Jump Linear Systems, 2005, Springer-Verlag, Berlin.

[9] Твърдението е доказано в теорема 2 в **Costa, O.L.V., Marques, R.P..** Maximal and stabilizing Hermitian solutions for discrete-time coupled algebraic Riccati equations. // Mathematics of Control, Signals and Systems, 1999, 12, с.167.

[10] **Ivanov, I.** Stein iterations for the coupled discrete-time Riccati equations. // Nonlinear Analysis Series A: Theory, Methods and Applications, 2009, 71, с. 6244.

[11] Пак там.

(6) $$X_i^{(k)} - p_{ii}\widetilde{A}^T{}_{i,X^{(k-1)}} X_i^{(k)} \widetilde{A}_{i,X^{(k-1)}} = W_{i,X^{(k-1)}} + \widetilde{\mathbf{A}}^{\mathbf{T}}_{\mathbf{i,X^{(k-1)}}} (\Xi_{i1}(\mathbf{X}^{(k)}) + \Xi_{i2}(\mathbf{X}^{(k-1)}))\widetilde{A}_{i,X^{(k-1)}}$$

където i=1,…, N, k=0,1,2,… и

$$F_{i,X} = -(R_i + B_i^T \Xi_i(\mathbf{X}) B_i)^{-1}(B_i^T \Xi_i(\mathbf{X}) A_i + L_i^T)$$

$$\widetilde{A}_{i,X} = A_i + B_i F_{i,X} ,$$

$$W_{i,X} = Q_i + F_{i,X}^T L_i^T + L_i F_{i,X} + F_{i,X}^T R_i F_{i,X} ,$$

$$\Xi_{i1}(\mathbf{X}) = \sum_{j<i} p_{ij} X_j \quad \text{и} \quad \Xi_{i2}(\mathbf{X}) = \sum_{j>i} p_{ij} X_j .$$

При решаване на линейното матрично уравнение (6) спрямо неизвестното $X_i^{(k)}$ е необходимо да се реши линейно матрично уравнение на Стейн с коефициент $\sqrt{p_{ii}}\widetilde{A}_{i,X^{(k-1)}}$, откъдето идва името на метода. Необходимо е да се докаже сходимостта на итерационната формула на Стейн. Това е направено чрез една теорема[12] и тя потвърждава, че предложената итерационна формула (6) води до намиране на максималното решение на (3).

От гледна точка на приложенията,[13] актуален е въпросът дали системата матрични уравнения (3) има решение в случаите, когато тегловите матрици $R_1, R_2, ..., R_N$ не са положително определени. Опитът показва, че в някои случаи това решение съществува, а в други случаи не съществува. Важно за практиката е да се намери критерий, който да показва наличието на максимално решение на системата уравнения (3). В нашето изследване разширяваме понятието коефициент на разрешимост, въведено от Rami, Zhou и Moore[14] и Rami и Zhou[15], като го формулираме за разглежданата система (3). Коефициент на разрешимост r* на системата уравнения (3) наричаме най-голямото неотрицателно число r, за което системата (3) има решение за произволни теглови матрици $R_1, R_2, ..., R_N$ със свойството $R_i > -r^* I$, i=1,…,N. Намирането на този коефициент позволява да дефинираме критерий дали съществува максималното решение на системата или не. Този критерий е изведен и формулиран в следващата теорема, която е доказана в хода на изследването:

[12]Пак там.

[13]**Costa, O.L.V**., de Paulo W.L. Indefinite quadratic with linear costs optimal control of Markov jump with multiplicative noise systems. // Automatica, 2007, 43, с. 587.

[14]**Rami M.A., Zhou, X.Y.,** Moore J.B., Well-posedness and attainability of indefinite stochastic linear quadratic control in infinite time horizon. // Systems and Control Letters, 2000, vol. 41, с.123.

[15]**Rami, M., and Zhou, X.** Linear matrix inequalities, Riccati equations, and indefinite stochastic linear quadratic controls. // IEEE Transactions on automatic control, 2000р 45, с.1131.

Теорема 1. Коефициентът на разрешимост r* за системата (3) се пресмята чрез следната оптимизационна задача:

$$\min(-r)$$

$$\begin{pmatrix} -X_i + A_i^T \Xi_i(\mathbf{X}) A_i + Q_i & A_i^T \Xi_i(\mathbf{X}) B_i + L_i \\ L_i^T + B_i^T \Xi_i(\mathbf{X}) A_i & B_i^T \Xi_i(\mathbf{X}) B_i - rI_q \end{pmatrix} \geq 0$$

$$B_i^T \Xi_i(\mathbf{X}) B_i - rI_q > 0$$

$$r > 0.$$

Освен това, коефициентът на разрешимост r* притежава следните свойства:

Ако най-малката собствена стойност $\lambda_{\min}(R_i)$ за всяка матрица R_i удовлетворява неравенството $\lambda_{\min}(R_i) > -r^*$ за i=1,…,N, то системата уравнения (3) има решение.

Теоремата приемаме без доказателство.

3. Цели на проекта

Представихме три метода за намиране на максималното решение на изследваната система от обобщени дискретни алгебрични уравнения на Рикати (3): $X_i = \mathrm{T}_i(\mathbf{X})$ – обекта на нашето изследване. Това са метода за решаване на оптимизационната задача (5) (накратко подход или метод на ЛМН) и двата итерационни метода: Ал СМ и метода на Стейн (6) (МС). Тези методи ще използваме като средства за намиране на максималното решение на системата (3).

Основна цел на настоящото изследване е да се анализира поведението на двата итерационни метода (Ал СМ, и метода на Стейн) и да се сравнят с метода на ЛМН по отношение на бързина и точност на пресмятанията. Сравнението да се извърши в следните специални случаи на индефинитни и отрицателно определени матрици $R_1, R_2, ..., R_N$. В теоретичен план трябва да се модифицират разглежданите методи, така че чрез новите методи да се ускори намирането на максималното решение на системата (3).

Работата по изпълнение на основната цел на проекта съдържа изпълнението на по-малки цели чрез конкретни научни задачи. Такива краткосрочни цели за проекта са (А) алгоритмизиране на описаните методи и преобразуването им в програмни модули, подходящи за работа в изчислителната среда MATLAB[16]; (Б) изследване на изчислителните характеристики на съществуващите итерационни методи за намиране на максимално симетрично решение на (3). Изчислителните показатели за това са брой итерационни стъпки, бързина на алгоритъма и избор на начално приближение; (В) да се приложат създадените алгоритми в частните случаи когато тегловите матрици $R_1, R_2, ..., R_N$ (или част от тях) не са положително определени, т.е. или са индефинитни, или са нулеви, или са отрицателно определени. Да се сравнят изчислителните показатели със случая на положително определени теглови матрици; (Г) да се изпълни теоретично

[16] MATLAB е запазена марка на MathWorks,Inc.

изследване с цел да се предложат нови модифицирани методи за търсене на максималното решение на системата дискретни алгебрични Рикатиеви уравнения (3). При това да се изследват теоретичните свойства на модифицираните методи; (Д) да се проведат числени експерименти и да се сравнят изчислителните показатели на модифицираните методи с тези на съществуващите методи.

При изпълнение на всяка от описаните цели се преминава през конкретни научни задачи, на които няма да се спираме в детайли. Нека представим работата по изпълнение на описаните цели.

4. Изследователска работа по изпълнение на цели (А) - (В). Провеждане на числени експерименти. Анализ на резултатите.

За изпълнението на цели (А), (Б) и (В) ще проведем числени експерименти. В началото сме съставили съответни програмни модули за трите метода в програмната среда на MATLAB, които използваме, за да пресметнем максималното решение на системата дискретни Рикатиеви уравнения (3) в случая на три уравнения, т.е. N=3. Експериментите провеждаме в програмната среда MATLAB с компютър 2,16GHz Intel(R) Dual CPU. Коефициентите на системата A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3, L_1, L_2, L_3 ще симулираме при различни размерности, като прилагаме функция за случайни числа. Използваме всички възможности за софтуерния пакет MATLAB, приложими за нашето изследване. Определящи в модела (1)-(2) са матриците R_i и Q_i, i=1,2,3. В зависимост от техния избор разглеждаме четири тестови примера. Тегловите матрици Q_i избираме да бъдат положително полуопределени, а тегловите матрици R_i да бъдат положително определени, нулеви, индефинитни и отрицателно определени.

Експериментираме за различни стойности на размерността n. За всяка стойност на n провеждаме 100 опита – формираме коефициентите на системата и след това с алгоритмите на описаните методи намираме максималното решение. При дефинирането на матричните коефициенти функцията randn(n,3) се използва, за да формира $n \times 3$ матрици от псевдослучайни числа – получават се чрез системна функция от програмната среда. Като резултат отчитаме максималния брой итерации (означаваме mIt) от тези 100 изпълнения и средния брой итерации (означаваме avIt) за достигане на решението за всеки едни метод. Отчетените числови стойности са описани в подходящи таблици[17]. Подробностите по провеждане на експериментите и резултатите от тях могат да се намерят в отчета по проекта и студията представена за печат[18]. Важният извод, който определя посоката на нашите следващи изследвания е, че методът на ЛМН е много по-бавен за неположително определени теглови матрици R_1, R_2, R_3 отколкото в случая за положително определени матрици. Същият този метод намира широки приложения в практиката и е често използван. Това налага изследвания, които да доведат до ускоряване на метода. Именно в тази посока са теоретичните изследвания, които провеждаме в изпълнение на цел (Г).

---

[17] Проф. дмн **Иван Иванов,** гл. ас. **Нонка Георгиева,** РАВНОВЕСИЕ В СТОХАСТИЧНИ МОДЕЛИ ЗА ОПТИМАЛНОСТ С ПРИЛОЖЕИЕ В ИКОНОМИКАТА // Алманах на Стопанска академия «Д. Ценов», 2012.

[18] Пак там.

5. Теоретични резултати

След провеждане на теоретичен анализ подходящи преобразования върху дадената система дискретни Рикатиеви уравнения (3) извеждаме две нови оптимизационни задачи, които са еквивалентни на оптимизационната задача (5), т.е. имат едно и също решение. Първата оптимизационна задача е следната:

$$\max < I_q, Z >$$

$$(7) \qquad \begin{pmatrix} -Z_i + A_i^T \Xi_i(Z) A_i + \tilde{Q}_i & A_i^T \Xi_i(Z) B_i + \tilde{L}_i \\ \tilde{L}_i^T + B_i^T \Xi_i(Z) A_i & \tilde{R}_i + B_i^T \Xi_i(Z) B_i \end{pmatrix} \geq 0 \quad .$$

$$\tilde{R}_i + B_i^T \Xi_i(Z) B_i > 0, i = 1, ..., N.$$

В задачата (7) неизвестната матрица е $Z=(Z_1,\ldots,Z_N)$, докато матрицата $Y=(Y_1,\ldots,Y_N)$ избираме, така че всички матрици $\tilde{R}_i = R_i + B_i^T \Xi_i(Y) B_i$ да бъдат положително определени или нулеви. Пресмятаме

$$\tilde{L}_i = L_i + A_i^T \Xi_i(\mathbf{Y}) B_i, \quad \tilde{Q}_i = A_i^T \Xi_i(\mathbf{Y}) A_i + Q_i - Y_i .$$

Втората оптимизационна задача е (i=1,…,N):

$$\max \sum_{i=1}^{N} < I_p, Y_i >$$

$$(8) \qquad \begin{pmatrix} -Y_i + \tilde{A}_i^T Y_i \tilde{A}_i + \Psi_i(\mathbf{Y}) + Q_i & \tilde{A}_i^T Y_i B_i + \tilde{L}_i \\ \tilde{L}_i^T + B_i^T Y_i \tilde{A}_i & R_i + B_i^T Y_i B_i \end{pmatrix} \geq 0 \ ,$$

$$R_i + B_i^T Y_i B_i > 0$$

в която неизвестните $Y_1,\ldots,Y_N$ са избрани $Y_i = \Xi_i(\mathbf{X}) = \sum_{j=1}^{N} p_{ij} X_j$, i=1,…,N.

Новите коефициенти в (8) се пресмятат по формулите

$$\tilde{A}_i = \sqrt{\frac{p_{ii}}{1-\delta_{ii}}} A_i, \quad \delta_{ij} = \sum p_{is} \mu_{sj}, \quad (\mu_{ij}) = P^{-1}, \quad \tilde{Q}_i = \frac{p_{ii}}{1-\delta_{ii}} Q_i,$$

$$\tilde{L}_i = \sqrt{\frac{p_{ii}}{1-\delta_{ii}}} L_i, \quad \gamma_{ij} = \sum_{j \neq i} \frac{\delta_{ij}}{1-\delta_{ii}}, \ \Psi_i(\mathbf{Y}) = \sum_{j \neq i} \gamma_{ij} Y_j, \ \text{i=1,…,N.}$$

Новите оптимизационни задачи, водещи до пресмятане на максималното решение на (3), се отличават със следното. В задачата (7) тегловите матрици $\tilde{R}_i = R_i + B_i^T \Xi_i(Y) B_i$ са положително определени или нулеви, за разлика от съответните им в задачата (5). А задачата (8) е спрямо неизвестните $Y_1,\ldots,Y_N$, като по този начин се избягва от линейната зависимост между неизвестните в задача (5), представена чрез функцията $\Xi_i(\mathbf{X}) = \sum_{j=1}^{N} p_{ij} X_j$.

6. Сравняване на метода на ЛМН за трите оптимизационни задачи

За да направим изводи за смисъла и ефективността на предложените модификации на метода на ЛМН, изпълняване числени експерименти. Тук ще опишем такива върху един възможен пример с коефициенти, генерирани с функция за псевдослучайни числа. Принципът на провеждане на експеримента е еднотипен за всички експерименти, включени в изследователската работа и той е вече описан.

Пример. Коефициентите на системата уравнения (3) формираме по формулите:

A_1=randn(n,n)/6; A_2=randn(n,n)/6; A_3=randn(n,n)/6;
B_1=rand(n,n)/8; B_2=randn(n,n)/8; B_3=randn(n,n)/8.

Избираме $L_1=L_2=L_3=0$, а матрицата на вероятностите на прехода примерите в тази статия се избира от вида:

$$P= \left(p_{ij}\right)_{i,j=1}^{3} = \begin{bmatrix} 0.67 & 0.17 & 0.16 \\ 0.37 & 0.40 & 0.23 \\ 0.26 & 0.10 & 0.64 \end{bmatrix}.$$

Ще разгледаме два теста, с които ще определим различни теглови $n \times n$ матрици Q_1, Q_2, Q_3 и R_1, R_2, R_3:

Тест 1:

$R_1 = 0.1 * eye(n,n)$, $R_2 = 0.75 * eye(n,n)$, $R_3 = 0.5 * eye(n,n)$,

$Q_1 = 0.25 * eye(n,n), Q_2 = Q_1, Q_3 = Q_1$;

Тест 2:

$R_1 = 0.25 * eye(n,n), R_1(1,1) = -0.001,$

$R_2 = 0.75 * eye(n,n), R_2(1,1) = -0.001,$

$R_3 = 0.5 * eye(n,n), R_3(1,1) = -0.001,$

$Q_1 = 0.05 * eye(n,n), Q_1(1,1) = 0,$

$Q_2 = 0.25 * eye(n,n), Q_2(2,2) = 0,$

$Q_3 = 0.95 * eye(n,n), Q_3(3,3) = 0.$

В този пример специалната матрица $Y=(Y_1,\ldots,Y_N)$ избираме така, че матриците $\tilde{R}_i$ да бъдат нулеви. Резултатите за изчислителните характеристики на метода на ЛМН, приложен за двете оптимизационни задачи (5) и (7) са описани в таблици 1 и 2.

Таблица 1: ***Резултати от експериментите за тест 1*** **.**

Тест 1					
	ЛМН (5)		ЛМН (7)		Ускорение
n	m It	Av It	m It	av It	
	(1)	(2)	(3)	(4)	1-(4)/(2)
8	22	21,1	16	14,3	0,32
9	23	21,4	16	14,8	0,31
10	25	21,9	17	14,5	0,34
11	23	22,3	16	14,1	0,37
12	24	22,5	16	14,3	0,36
13	26	24,5	18	15	0,39

14	26	24,3	20	17,3	0,29
15	26	24,6	21	16,5	0,33

Таблица 2: ***Резултати от експериментите за тест 2.***

Тест 2					
	ЛМН (5)		ЛМН (7)		Ускорение
n	M It	Av It	m It	av It	
	(1)	(2)	(3)	(4)	1-(4)/(2)
8	27	25,8	19	16,6	0,36
9	31	27,4	23	20,4	0,26
10	29	26,8	22	19,4	0,28
11	27	25,8	22	19,8	0,23
12	31	27,2	22	20,1	0,26
13	31	28,6	23	21,8	0,24
14	30	27,6	22	19,4	0,30
15	65	44,4	55	36,2	0,18

След анализ на резултатите от таблици 1 и 2 се отбелязва, че ускорението при решаване на оптимизационната задача (7) е средно около 25 процента.

Няма правило, което да казва как да изберем специалната матрица $Y=(Y_1,\dots,Y_N)$, т.е. каква да бъде новата матрица $\widetilde{R}_i$. Затова няма сигурност, че винаги може да са намери матрица $Y=(Y_1,\dots,Y_N)$, която да ускори съществено работата на метода на ЛМН.

Сега ще разгледаме нов пример, с който ще покажем, че при друг избор на матрицата $Y=(Y_1,\dots,Y_N)$ можем да осигурим по-голямо ускорение, като използваме предложената оптимизационна задача (8).

Пример. Формираме коефициентите на системата нелинейни уравнения (3):

A_1=randn(n,n)/5; A_2=randn(n,n)/5; A_3=randn(n,n)/5;
B_1=randn(n,3)/10; B_2=randn(n,3)/10; B_3=randn(n,3)/10;
L_1=randn(n,3)/1000; L_2=randn(n,3)/1000; L_3=randn(n,3)/1000

Матрицата на вероятностите на прехода не се променя. В провежданите тестове матриците Q_1,Q_2,Q_3 и R_1,R_2,R_3 остават непроменени за всичките 100 изпълнения. В зависимост от техния избор са обособени следващите четири тестови примера:

Тест 3.: Тегловите матрици R_1,R_2,R_3 и Q_1,Q_2,Q_3 са положително определени:

$$R_1 = diag(0,1;0,25;0,5), R_2 = diag(0,75;0,25;0,75),\ R_3 = diag(0,5;1,25;1,5),$$
$$Q_1 = 0.25 * eye(n,n), Q_2 = Q_1, Q_3 = Q_1.$$

Тест 4.: Матриците Q_1,Q_2,Q_3 са положително полуопределени докато матриците R_1,R_2,R_3 са нулеви:

$$R_1 = R_2 = R_3 = diag(0;0;0),$$

$$Q_1 = diag(0;0{,}05;...;0{,}05),$$
$$Q_2 = diag(0{,}25;0;0{,}25;...;0{,}25),$$
$$Q_3 = diag(0{,}95;0{,}95;0;0{,}95,...,0{,}95)\ .$$

Тест 5.: Матриците R_1, R_2, R_3 са индефинитни, т.е. имат положителни и отрицателни собствени стойности:

$$R_1 = diag(-0{,}001;0{,}25;0{,}5)\ ,$$
$$R_2 = diag(-0{,}0025;0{,}25;0{,}75),$$
$$R_3 = diag(-0{,}001;1{,}25;1{,}5),$$
$$Q_1 = diag(0;0{,}05;...;0{,}05),$$
$$Q_2 = diag(0{,}25;0;0{,}25;...;0{,}25),$$
$$Q_3 = diag(0{,}95;0{,}95;0;0{,}95,...,0{,}95)\ .$$

Тест 6.: Матриците R_1, R_2, R_3 са отрицателно определени, т.е. имат отрицателни собствени стойности:

$$R_1 = diag(-0{,}0001;-0{,}00002;-0{,}00005)\ ,$$
$$R_2 = diag(-0{,}000025;-0{,}00001;-0{,}000075),$$
$$R_3 = diag(-0{,}0001;-0{,}000125;-0{,}00015)\ ,$$
$$Q_1 = diag(0;0{,}05;...;0{,}05)\ ,$$
$$Q_2 = diag(0{,}25;0;0{,}25;...;0{,}25),$$
$$Q_3 = diag(0{,}95;0{,}95;0;0{,}95;...;0{,}95)\ .$$

Резултатите за изчислителните характеристики на метода на ЛМН, приложен да двете оптимизационни задачи (5) и (8) за този пример са описани в таблици 3 и 4.

Таблица 3. ***Резултати от експериментите върху тестове 3 и 4 за сравняване на двете оптимизационни задачи.***

	ЛМН (5)		ЛМН (8)		ЛМН (5)		ЛМН (8)	
	Test 3.				Test 4.			
n	m It	av It	m It	av It	m It	av It	m It	Av It
8	24	22,3	24	23,0	37	31,0	33	28,6
9	24	23,3	24	23,3	39	35,4	31	28,8
10	25	24,0	28	24,0	39	33,2	34	31,6
11	27	24,3	32	24,3	37	30,6	31	29,6
12	26	24,5	34	24,5	34	30,8	30	28,0
13	27	26,3	34	26,3	37	29,0	32	30,8
14	29	28,0	37	28,0	40	33,2	35	32,4
15	34	28,8	38	28,8	32	29,2	36	31,0
20	36	34,0	40	34,0	37	34,4	32	30,4
25	52	45,0	53	47,0	40	34,6	38	33,6
	Време за изпълнение на всяка програма (10 повторения) в секунди							
15	71		35		75		35	

20	239	128	222	103
25	918	505	649	351

Таблица 4. ***Резултати от експериментите върху тестове 5 и 6 за сравняване на двете оптимизационни задачи.***

	ЛМН (5)		ЛМН (8)		ЛМН (5)		ЛМН (8)	
	Test 5.				Test 6.			
n	m It	av It	m It	av It	m It	av It	m It	Av It
8	28	27,2	33	30,6	34	27,4	32	27,4
9	33	27,8	33	30,8	39	35,0	30	26,2
10	30	28,4	31	29,4	38	29,6	36	29,4
11	32	30,2	32	30,8	31	27,8	29	26,6
12	31	28,4	33	31,4	33	30,2	33	32,0
13	31	30,4	36	30,6	34	31,4	34	30,8
14	33	29,0	33	31,6	37	31,6	34	30,2
15	31	29,8	35	32,4	40	33,4	35	32,0
20	36	31,2	40	33,0	34	31,6	33	29,8
25	51	41,6	51	41,4	43	35,8	37	34,2
	Време за изпълнение на всяка програма (10 повторения) в секунди							
15	73		33		77		31	
20	229		114		235		101	
25	966		500		669		321	

Сравняването на резултатите от таблици 3 и 4 показва, че средният брой итерации за решаване на двете оптимизационни задачи при всички тестове е почти един и същ. Но това не означава, че двата метода имат почти едни и същи числови свойства. В таблици 3 и 4 е отразено времето, необходимо на програмния модул да реши съответната оптимизационна задача. Всеки програмен модул използва обръщение към стандартни процедури от MATLAB. А процедурата ***mincx*** всъщност решава оптимизационната задача. За нашите примери тази процедура работи с точност 10^{-10} . Разликата във времето е съществена и тя показва, че методът, приложен за втората оптимизационна задача (8) е два пъти по-бърз. Този извод се забелязва при всички тестови матрици и при всяка размерност на матриците (15, 20, 25). Следователно, решаването на новата оптимизационна задача (8) изисква два пъти по-малко компютърно време за намиране на максималното решение на системата (3). И следователно, броят на компютърните операции за решаване на (8) на една итерация е два пъти по-малък от същия брой при решаване на задачата (5). Това намаление се дължи на новото преобразование, което приложихме, за да изведем оптимизационната задача (8). Резултатите в таблиците 3 и 4 показват и още един извод и той е, че независимо кой тест се решава в средата на MATLAB средният брой итерации и времето за работа имат много близки стойности.

7. Изводи и научни приноси

В резултат на научноизследователската работа по проекта са оформени следните научни приноси: предложени са нови модифицирани методи за търсене на максималното решение на система нелинейни матрични уравнения от вида (3). Тези методи имат своите предимства, показани чрез експериментите по работата по проекта и тези предложени в тази статия. В статията са разгледани два нови подобрени варианта на метода на ЛМН, за решаване на системата (3). На база на проведените експерименти се отбелязват предимствата на новите предложения – с използването на новите оптимизационни задачи (7) и (8) се получава съществено ускоряване на метода на ЛМН, като се запазва точността на намереното решение. Подходът, използван за извеждане на новите оптимизационни задачи (7) и (8) е приложим и в други научни области, където се работи с подобни уравнения и системи от уравнения.